

## SEMIGRUPOS NUMÉRICOS

P. VASCO, CM-UTAD

BRAGA, 4 DE NOVEMBRO DE 2011

Um semigrupo numérico é um subconjunto de  $\mathbb{N}$  (aqui  $\mathbb{N}$  denota o conjunto dos inteiros não negativos) que é fechado para a adição, contém o elemento 0 e tem complemento finito em  $\mathbb{N}$ .

Aproveitarei para definir alguns conceitos relacionados com semigrupos numéricos e farei algumas observações, que julgo interessantes, relativas a estes conceitos. Apresentarei também algumas famílias bastante conhecidas de semigrupos numéricos. Uma delas é a família dos semigrupos numéricos proporcionalmente modulares.

A multiplicidade e o número de Frobenius são dois importantes invariantes de um semigrupo numérico. Eles são o menor inteiro positivo que pertence ao semigrupo numérico e o maior inteiro que não pertence ao semigrupo numérico, respectivamente. Dados dois inteiros  $m$  e  $n$  com  $n \neq 0$ , denotamos por  $m \bmod n$  o resto da divisão inteira de  $m$  por  $n$ . Uma inequação Diofantina proporcionalmente modular é uma expressão da forma  $ax \bmod b \leq cx$ , em que  $a$ ,  $b$  e  $c$  são inteiros positivos. Dada a inequação Diofantina proporcionalmente modular  $ax \bmod b \leq cx$ , denotamos por  $S(a, b, c)$  o conjunto de soluções inteiras desta inequação,  $S(a, b, c) = \{x \in \mathbb{N} \mid ax \bmod b \leq cx\}$ . O conjunto  $S(a, b, c)$  é um semigrupo numérico chamado semigrupo numérico proporcionalmente modular.

Darei um algoritmo que permite calcular a multiplicidade de um semigrupo numérico proporcionalmente modular  $S(a, b, c)$ , com  $a$ ,  $b$  e  $c$  inteiros positivos. Este algoritmo, como veremos, apresenta uma grande semelhança com o algoritmo de Euclides para o cálculo do máximo divisor comum de dois inteiros. Notemos que dar uma fórmula para a multiplicidade de  $S(a, b, c)$ , a partir dos inteiros  $a$ ,  $b$  e  $c$  é um problema em aberto. Este problema continua por resolver mesmo para o caso  $c = 1$  (semigrupo numérico modular).

Finalmente apresentarei algumas aplicações do referido algoritmo na determinação de outros invariantes de alguns semigrupos numéricos.